5) Approximation Algorithms

Why

Nogle problemer er NP-complette, derfor er det usandsynligt at finde en polymiel algoritme der finder den optimale løsning.

Det kan dog være muligt at finde en nær-optimal løsning i polymiel tid.
En algoritme der returnerer en sådan løsning kaldes en approximationsalgoritme.

Approximations ratio

En algoritme har approximation ratio på $p(n)$ hvis for alle inputstørelser n, er prisen for løsningen C indenfor en faktor $p(n)$ at den optimale løsning C^*:

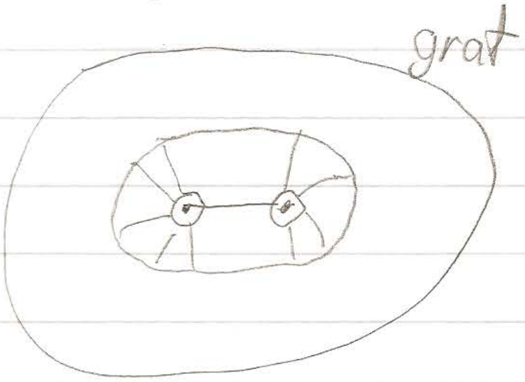
$$\max\left(\underbrace{\frac{C}{C^*}}_{\text{minimerings problem}}, \underbrace{\frac{C^*}{C}}_{\text{maximerings problem}}\right) \le p(n)$$

En sådan algoritme kaldes en $p(n)$-approximationsalgoritme.

Vertex cover

Undirected graf $G=(V, E)$
Find $V' \subseteq V$ så for hver kant $(u,v) \in E$ så
$u \in V'$ eller $v \in V'$ så $|V'|$ minimeres.
Vertex cover $\in NPC$

Polynomiel tids 2-approximations algoritme



1. Vælg en ikke inkluderet kant
2. Tag begge knuder med
3. Fjern sub-graf
4. Bliv ved indtil ikke flere kanter

Bevis:

- Algoritmens kørselstid er polynomiel
- Algoritmen returnerer et vertex-cover

Lad A være de udvalgte kanter
For at dække alle kanterne i A må ethvert vertex-cover have én af endepunkterne med. Dette gælder specielt også for den optimale løsning C^* Dette er fordi ingen af kanterne i A deler et endepunkt. Dvs:

$|C^*| \geq |A|$

Algoritmen inkluderer begge endepunkter:

$|C| = 2|A|$

Dette giver os

$$|C| = 2|A| \leq 2|C^*|$$

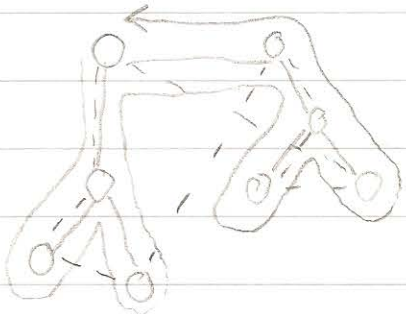
□

TSP with TI (Traveling salesman problem with Triangle Inequality)

Complete undirected graf $G(V,E)$
Hver kant har en pris, denne overholder TI

2-approximation polymiel tids algoritme

1. Vælg knude som rod
2. Beregn minimum udspændende træ
3. Lad L være listen at besøgte knuder i en pre-order walk
4. Returner den hamiltonske cykel der går gennem knuderne i L's rækkefølge



Bevis:

- Den er polymiel tids beregnelig

Lad H^* være den optimale tour. Vi opnår et udspændende træ hvis en kant slettes, derfor er det minimum uspændende træ T et lower bound for H^*

$c(T) \leq c(H^*)$

En fuld gennemgang W af T vil gennemgå hver kant 2 gange

$c(W) = 2c(T)$

Hvilket medfører:

$c(W) \leq 2c(H^*)$

W er dog ikke generelt en tur, da den går gennem nogle knuder mere end 1 gang.

Istedet for at gå tilbage gennem en allerede besøgt knude, kan vi pga. TI gå direkte til knuden uden at prisen stiger. Kald denne tur H. Vi har da:

$$c(H) \leq c(W)$$
$$\leq 2c(H^*)$$ $\square$

TSP without TI

Theorem

Hvis $P \neq NP$, så for ethver konstant $p \geq 1$ er der ingen polymiel tids p-approximations algoritme

Bevis ved modsætning

Antag der findes en polymiel p-approximations algoritme A. Ved at benytte A vil vi løse hamilton path problemet som er NPC, hvilket ville betyde at $P = NP$.

Lad $G(V,E)$ være en instans af hamilton problemet.
Lad $G' = (V, E')$ være en komplet graf
Definer $c(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } (u,v) \in E \\ p|V|+1 & \text{ellers} \end{cases}$

Hvis G har en hamilton cycle, så har G' en TSP tour med cost $|V|$. Hvis G ikke har en hamilton cycle vil G' stadig have en TSP tour, men med cost mindst
$p|V| + 1 + (|V|-1) > p|V|$
Hvis A køres på G', så hvis G har en hamilton cycle, så vil A returnere denne da A er garanteret til ikke at returnere en tour der er mere end p gange dårligere.

Hvis G ikke har en hamilton cycle vil A returnere en cycle med cost større end $p|V|$.
A kan derfor benyttes til at løse Hamilton path problemet i polynomiel tid. $\square$